Д. В. Кафтан

**ДРЕВЕСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БЕСПОВТОРНЫХ ФУНКЦИЙ
В РАСШИРЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БАЗИСАХ****Аннотация.**

Актуальность и цели. В области информационных технологий аппарат булевых функций играет значительную роль, в связи с чем становится актуальным исследование различных свойств булевых функций. Данная статья посвящена такому важному свойству, как возможность представления функции в заданном базисе формулой без повторения переменных (бесповторной формулой). Представленные таким образом функции можно рассматривать как класс функций, которые в данном базисе устроены достаточно просто. В работе исследуется вопрос представления бесповторных булевых функций помеченными деревьями. Целью данной работы является получение древесного представления для функций, бесповторных в базисах, состоящих из конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и поляризуемых функций Стеценко, в котором деревья одинаковых функций изоморфны, а также множества эквивалентных преобразований для деревьев такого вида.

Материалы и методы. Используется математический аппарат теории перестановок, свойства помеченных корневых деревьев и индивидуальные свойства поляризуемых функций Стеценко.

Результаты и выводы. Получено древесное представление для бесповторных функций в базисах, состоящих из поляризуемых функций Стеценко и элементарного базиса, соответствующее их формулам с поднятым отрицанием, и выявлено множество эквивалентных преобразований для данного типа деревьев.

Ключевые слова: бесповторная функция, каноническое дерево.

D. V. Kaftan

**ON TREE REPRESENTATION OF READ-ONCE
FUNCTIONS IN EXTENDED ELEMENTARY BASES****Abstract.**

Background. The mathematics of Boolean functions has a profound effect in the area of information technologies. This article is devoted to an important ability of the function to be represented in the given basis via a formula without replication of variables (a read-once formula). Functions which can be represented such way may be regarded as quite simply structured in this basis. We consider a problem of read-once functions' tree representation in the bases consisting of conjunction, disjunction, negation and polarized Stecenko's functions. The object of the article is to provide a tree representation where equal functions have isomorphic trees and obtain a set of relevant equivalent tree transformations.

Materials and methods. We apply the mathematics of permutations and use properties of polarized Stecenko's functions and labeled rooted trees.

Results and conclusion. We have provided a tree representation for read-once functions in the bases consisting of polarized Stecenko's functions and an elementary basis and corresponding to formulas with raised negotiations, as well as obtained a set of relevant equivalent transformations for the given type of trees.

Key words: read-once function, canonical tree.

В соответствии с определениями, принятыми в работах [1–3], введем несколько понятий. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, представляемая (не представляемая) формулой без повторения переменных – *бесповторной формулой* – в некотором базисе, называется *бесповторной (повторной)* в этом базисе.

Преобразованиями обобщенной однотипности называются замена переменной или самой функции на ее отрицание и перестановка переменных. Функции, получаемые друг из друга конечным числом преобразований обобщенной однотипности, называются *обобщенно однотипными*. Относительно перестановок переменных и их отрицания множество булевых функций образует так называемую *группу Джевонса* Q_n [4], и функции, получаемые друг из друга конечным числом таких преобразований, называются *Джевонс-эквивалентными*.

Двойственной функцией к функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Самодвойственной называется функция, совпадающая с двойственной ей функцией.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *монотонно (антимонотонно)* зависит от переменной x_i , если для любого набора значений остальных переменных $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$ выполняется следующее неравенство:

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \leq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$(f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \geq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)).$$

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *поляризуемой*, если она монотонна или антимонотонна по каждой из переменных, и *неполяризуемой* в противном случае.

Повторная в базисе B функция называется *слабоповторной*, если любая ее собственная подфункция бесповторна в этом базисе. В. А. Стеценко [1] получил все слабоповторные функции в элементарном базисе $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. С точностью до преобразований обобщенной однотипности они образуют следующие пять семейств:

$$f_d^s = x_1(\bar{x}_2 \vee x_3 x_4 \dots x_s) \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \dots \bar{x}_s, \quad s \geq 3,$$

$$f_t^s = x_1 x_2 \dots x_s \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_s, \quad s \geq 2,$$

$$f_m^s = x_1(x_2 \vee \dots \vee x_s) \vee x_2 x_3 \dots x_s, \quad s \geq 3,$$

$$f_4 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3 x_4,$$

$$f_5 = x_1(x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_5(x_2 x_3 \vee x_4).$$

В данной работе исследуется представление функций, бесповторных в базисе, состоящем из элементарного базиса и поляризуемых функций Стеценко, в виде деревьев соответствующих им формул. Древесное представление булевых функций широко используется в задаче построения схем из функциональных элементов в различных базисах и в теории контактных схем с независимыми контактами [5]. В работе [2] А. А. Вороненко приведено представление бесповторных функций в базисе, состоящем из всех функций, зависящих менее чем от двух аргументов, в виде так называемого каноничес-

кого дерева, т.е. помеченного корневого дерева, которое в этом базисе имеет следующий вид:

1. Константой (0 или 1) может быть помечена лишь вершина, которая является единственной в дереве.
2. Листья дерева помечены переменными или их отрицаниями (литералами). Разные листья помечены литералами разных переменных.
3. Внутренние вершины помечены операциями из множества $\{\vee, \&, \oplus, \bar{\oplus}\}$.
4. Смежные вершины помечены разными символами. Смежные вершины не могут быть помечены одновременно символами линейных функций $\{\oplus, \bar{\oplus}\}$.
5. Вершина, лежащая над помеченной линейным символом и смежная с ней, не может быть помечена $\&$ или отрицанием переменной.

Также в работе [2] установлена единственность представления бесповторной в этом базисе функции с помощью канонического дерева. В работе [3] было отмечено, что в элементарном базисе также существует канонический вид дерева, обладающий свойством единственности, который может быть получен как частный случай канонического дерева в базисе всех функций двух переменных и имеет следующий вид:

1. Константой (0 или 1) может быть помечена лишь вершина, которая является единственной в дереве.
2. Листья дерева помечены переменными или их отрицаниями. Разные листья помечены литералами разных переменных.
3. Внутренние вершины помечены операциями из множества $\{\vee, \&\}$.
4. Смежные вершины помечены разными символами.

Обозначим P_m множество монотонных функций Стеценко, т.е. функций вида f_4, f_5 и f_m^S . Все рассматриваемые данным разделе базисы будем считать состоящими из B_0 и функций из P_m .

Согласно работам [2, 3] представленные выше канонические деревья единственны с точностью до перестановки дуг во внутренних вершинах, так как все функции, которыми помечены внутренние вершины, обладают свойством ассоциативности, т.е. изоморфны как помеченные деревья. В базисе B содержатся функции, не обладающие данным свойством, поэтому деревья, построенные для бесповторных в B функций по аналогичным правилам, не будут изоморфны как помеченные корневые деревья (не изоморфны будут уже деревья, представляющие слабоповторные функции из базиса). Но для каждой из этих функций существуют перестановки переменных, применение которых не меняет данную функцию. Это следует из утверждений 3, 4 и симметричности f_m^S относительно переменных $x_2, \dots, x_n$. Опишем эти перестановки:

1) перестановка переменных функции f_4 , где (x_1, x_2, x_3, x_4) переходит в (x_3, x_4, x_1, x_2) ;

2) перестановка переменных функции f_5 , где $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ переходит в $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ или $(x_2, x_1, x_3, x_5, x_4)$, или в композицию этих перестановок;

3) любая перестановка переменных $x_2, \dots, x_s$ функции f_m^s .

Квазиканоническим деревом функции f , бесповторной в базисе B , назовем помеченное корневое дерево, построенное согласно следующим правилам:

1. Константой (0 или 1) может быть помечена лишь вершина, являющаяся единственной в дереве.

2. Листья дерева помечены переменными или их отрицаниями. Разные листья помечены литералами разных переменных.

3. Внутренние вершины дерева помечены функциями из множества $\{\vee, \&\}$ или теми функциями вида f_4, f_5 и f_m^s , которые лежат в B .

4. Если вершина помечена функцией вида f_4, f_5 или f_m^s , то количество смежных вершин над ней совпадает с размерностью функции. Функция, помеченная $\vee$ или $\&$, может иметь две и более смежных вершин над ней.

5. Вершины, помеченные функцией $\vee$ ($\&$), не смежны с вершинами, помеченными функцией $\vee$ ($\&$).

По аналогии с преобразованиями обобщенной однотипности, определим типы преобразований для формул и квазиканонических деревьев согласно вышеуказанным перестановкам:

Преобразованием G_4 назовем перестановку переменных функции f_4 , где (x_1, x_2, x_3, x_4) переходит в (x_3, x_4, x_1, x_2) , и соответствующую перестановку дуг, входящих в вершину с пометкой f_4 в дереве.

Преобразованием G_5 назовем перестановки переменных функции f_5 , где $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ переходит в $(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$ или $(x_2, x_1, x_3, x_5, x_4)$, или композицию этих перестановок, и соответствующую перестановку дуг, входящих в вершину с пометкой f_5 в дереве.

Преобразованиями типа G_m^s назовем перестановки переменных $x_2, \dots, x_s$ функции f_m^s и соответствующую перестановку дуг, входящих в вершину с пометкой f_m^s в дереве.

Канонические деревья в B_0 и B_2 очевидным образом разбиваются на классы эквивалентности, где в одном классе лежат деревья, полученные друг из друга произвольной последовательностью перестановок дуг во внутренних вершинах. В работах [2, 3] показано, что такие деревья и только они соответствуют одинаковым функциям. Таким образом, множество классов эквивалентности взаимнооднозначно соответствует множеству бесповторных в заданном базисе функций. Это позволяет при исследовании свойств бесповторных функций пользоваться каноническим древесным представлением и тем его свойством, что деревья одинаковых функций получаются друг из друга перестановкой дуг в вершинах. В настоящей работе будет показано, что квазиканонические деревья обладают схожим свойством: деревья одинаковых функций получаются друг из друга некоторыми перестановками дуг в вершинах.

Во второй главе в работе [5] доказывается, что две разные бесповторные неразложимые формулы одной функции получаются друг из друга ко-

нечным числом преобразований из множества, состоящего из преобразований обобщенной однотипности и преобразования ассоциативности, где для ассоциативной функции f подформула $f(f(x_1, x_2), x_3)$ заменяется на $f(x_1, f(x_2, x_3))$ или наоборот. Такие формулы называются почти одинаковыми. С целью сделать формулы и, соответственно, деревья бесповторных функций в заданном базисе еще более похожими друг на друга, в данной работе будут рассмотрены формулы с поднятыми отрицаниями. Рассматриваемые базисы не включают в себя функции, конгруэнтные или двойственные уже имеющимся в базисе функциям Стеценко. В таком случае мы не сможем использовать все преобразования из работы [5] (например, отрицание над подформулой или произвольную перестановку переменных). Результатом данной работы является множество преобразований, состоящее из некоторых преобразований перестановок переменных в базисных функциях, что применение любого конечного числа преобразований из этого множества к бесповторной формуле с поднятыми отрицаниями не только не меняет значение функции, но и не выводит ее из множества формул с поднятыми отрицаниями в заданном базисе.

Введем на множестве квазиканонических деревьев отношение эквивалентности. Разделим квазиканонические деревья на классы эквивалентности так, чтобы в одном классе лежали деревья, которые можно получить друг из друга с помощью преобразований G_4 , G_5 , G_m^s и перестановки вершин, смежных с общей вершиной, помеченной $\vee$ или $\&$. Из утверждений 3, 4, а также из симметричности f_m^s относительно переменных $x_2, \dots, x_s$ и ассоциативности $\vee$ и $\&$ следует, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Аналогично вводится отношение эквивалентности на множестве соответствующих этим деревьям формул.

1. Вспомогательные утверждения

Утверждение 1. Для каждой переменной x_i функции $f \in P_m$ существует такая переменная x_j , что $x_i x_j$ является подфункцией f .

Доказательство. Для f_4 конъюнкция реализуется, например, в парах $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$. Для f_5 это могут быть пары $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_5\}$. Для $f_m^s - \{x_1, x_i\}$, где $i = \overline{2, s}$.

Утверждение 2. Для каждой переменной x_i функции $f \in P_m$ существует такая переменная x_j , что $x_i \vee x_j$ является подфункцией f .

Доказательство. Для f_4 дизъюнкция реализуется, например, в парах $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_3\}$. Для f_5 это могут быть пары $\{x_1, x_5\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_4\}$. Для $f_m^s - \{x_1, x_i\}$, где $i = \overline{2, s}$.

Утверждение 3. Справедливо

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_4(x_3, x_4, x_1, x_2),$$

$$\bar{f}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_4(\bar{x}_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2).$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_3x_4 = \\ &= x_3(x_4 \vee x_1) \vee x_1x_2 = f_4(x_3, x_4, x_1, x_2); \\ \bar{f}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) = \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_1(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 = f_4(\bar{x}_1, \bar{x}_4, \bar{x}_3, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Замечание 1. Нетрудно заметить, что применение преобразований обобщенной однотипности, не являющихся композицией преобразований из утверждения 3, дает функции, отличные от исходной, и, таким образом, для каждой из этих функций мы получаем свою подгруппу инерции в симметрической группе перестановок, т.е. подмножество перестановок, применение которых не меняет булеву функцию.

Утверждение 4. Справедливо

$$\begin{aligned} f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f_5(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1), \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f_5(x_2, x_1, x_3, x_5, x_4), \\ \bar{f}_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f_5(\bar{x}_5, \bar{x}_1, \bar{x}_3, \bar{x}_2, \bar{x}_4), \\ \bar{f}_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f_5(\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_2). \end{aligned}$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_2x_3 \vee x_4) = \\ &= x_5(x_2x_3 \vee x_4) \vee x_1(x_2 \vee x_3x_4) = f_5(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1); \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_2x_3 \vee x_4) = \\ &= x_2(x_5x_3 \vee x_1) \vee x_4(x_5 \vee x_3x_1) = f_5(x_2, x_1, x_3, x_5, x_4). \end{aligned}$$

2. Основные результаты

Утверждение 5. Для любой неповторной в базисе B функции существует реализующее ее каноническое дерево.

Доказательство. Рассмотрим произвольную неповторную в базисе B функцию f . Используя правила де Моргана, утверждения преобразования 3, 4 и самодвойственность функции f_m^s , можно из любой неповторной в B формулы получить неповторную в B формулу с поднятыми отрицаниями, равную исходной. Построим дерево по этой формуле. Склеим по ассоциативности смежные вершины, помеченные одинаковыми символами $\&$ или $\vee$. Полученное дерево удовлетворяет свойствам 1–5 из определения канонического дерева и потому является каноническим. Утверждение доказано.

Утверждение 6. Если различные канонические деревья D_1 и D_2 реализуют неповторную в базисе B функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, то листья этих деревьев образуют одинаковые множества литералов.

Доказательство. Допустим, что это не так, и в одном дереве есть лист x , а в другом – $\bar{x}$. Тогда две формулы с поднятыми отрицаниями, соответствующие этим деревьям, будут реализовывать поляризуемые функции с разной полярностью по переменной x (одна монотонная, другая антимонотонная по x). Это верно, потому что все функции в этом базисе, кроме отрицания, монотонны, и, следовательно, литерал в формуле с поднятыми отрицаниями задает полярность переменной. Следовательно, мы получили противоречие с тем, что деревья реализуют одну и ту же функцию. Утверждение доказано.

Замечание 2. Если функция f , неповторная в базисе B , монотонна, то все буквы в листьях деревьев D_1 и D_2 – это переменные без отрицания.

Утверждение 7. Если различные канонические деревья D_1 и D_2 реализуют неповторную в B монотонную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, и v_1 и v_2 – корни деревьев D_1 и D_2 соответственно, то существуют две переменные, обладающие следующим свойством: листья, помеченные этими переменными, лежат в разных поддеревьях как над v_1 , так и над v_2 .

Доказательство. Если у деревьев всего по два листа, то, очевидно, они лежат в разных поддеревьях в обоих деревьях.

Рассмотрим случай, когда у дерева не менее трех листьев.

Пусть $D_1^1, \dots, D_i^1$ и $D_1^2, \dots, D_j^2$ – поддеревья деревьев D_1 и D_2 , получаемые удалением корня из D_1 и D_2 . Пусть x_1 – переменная в дереве D_1^1 , x_2 – переменная в D_2^1 .

Если эти листья лежат в разных поддеревьях над v_2 , то мы нашли искомые переменные.

Пусть листья лежат в одном поддереве над v_2 . Не ограничивая общности, пусть это будет поддерево D_1^2 . Пусть x_3 – переменная в дереве D_2^2 . Тогда в дереве D_1 возможны три варианта расположения листа, помеченного той же переменной:

1) x_3 лежит в D_1^1 , тогда x_2 и x_3 лежат в разных поддеревьях в обоих деревьях;

2) x_3 лежит в D_2^1 , тогда x_1 и x_3 лежат в разных поддеревьях в обоих деревьях;

3) x_3 не лежит ни в D_1^1 , ни в D_2^1 , тогда обе эти пары лежат в разных поддеревьях в обоих деревьях.

Во всех трех случаях мы нашли два листа, лежащие в разных поддеревьях над корнями обоих деревьев. Утверждение доказано.

Утверждение 8. Если различные канонические деревья D_1 и D_2 реализуют неповторную в B монотонную функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, то в корне этих деревьев одинаковые функции.

Доказательство. Допустим, это не так. Пусть v_1 и v_2 – корни деревьев D_1 и D_2 соответственно, и функции, которыми они помечены, различны. Тогда, не ограничивая общности, возможны три варианта:

1. Первая функция – дизъюнкция, вторая – конъюнкция.

Согласно утверждению 7 найдется две переменных таких, что помеченные ими листья лежат в разных поддеревьях над корневыми вершинами деревьев D_1 и D_2 . Обозначим их x_1 и x_2 . Так как переменные существенные, то существует хотя бы одна существенная подфункция по x_1 и x_2 у каждой из функций, реализуемых этими деревьями. При этой константной подстановке на места других переменных в функции, которые реализуют эти деревья, получатся различные существенные подфункции: у первого дерева – только дизъюнкции, а у второго – только конъюнкции. Следовательно, такие деревья не могут реализовывать одну и ту же функцию. Противоречие.

2. Первая функция – $f' \in P_m$ и зависит от t переменных, вторая – дизъюнкция.

Согласно утверждению 7 найдется две переменных таких, что помеченные ими листья лежат в разных поддеревьях над корневыми вершинами деревьев D_1 и D_2 . Обозначим их x_1 и x_2 . Обозначим $D_1^1, \dots, D_t^1$ корневыми поддеревьями дерева D_1 . Не ограничивая общности, пусть x_1 и x_2 лежат в D_1^1 и D_2^1 . Возьмем $(t-2)$ переменных из оставшихся $(t-2)$ поддеревьев, обозначим их $x_3, \dots, x_t$. Так как в функции f все переменные существенные, то существует такая константная подстановка, что деревья $D_1^1, \dots, D_t^1$ обращаются в переменные $x_1, \dots, x_t$. Применим эту подстановку к D_1 , получим дерево, реализующее формулу $f'(x_1, \dots, x_t)$ слабоповторной в B_0 функции. Применив эту подстановку ко второй функции, мы получим функцию, существенно зависящую не более чем от t переменных, в корне дерева которой находится дизъюнкция и которое представляет собой формулу вида $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_i$, которая является неповторной в $B \setminus \{f'\}$ формулой, поскольку подформулы $\Phi_1, \dots, \Phi_i$ имеют меньше t переменных. Такого дерева не существует для функции f' , так как она слабоповторна в B_0 и поэтому слабоповторна в любом базисе, содержащем B_0 и другие слабоповторные в нем функции. Следовательно, деревья D_1 и D_2 реализуют разные функции. Противоречие.

3. Первая функция – $f' \in P_m$ и зависит от t переменных, вторая – конъюнкция.

Доказывается аналогично пункту 2.

Утверждение доказано.

Теорема. Квазиканонические деревья, соответствующие неповторной в B функции, эквивалентны.

Доказательство. Докажем по индукции по n .

Пусть $n=1$. Тогда квазиканоническое дерево состоит из одного листа. Тогда два разных дерева будут соответствовать двум разным листьям, а по утверждению 6 у двух квазиканонических деревьев одной функции одинаковые листья, следовательно, не может быть двух разных деревьев.

Пусть у каждой функции с количеством переменных, меньшим чем n , квазиканонические деревья эквивалентны. Из этого следует, что эквивалентны и представления этой функции неповторными формулами с поднятыми отрицаниями в базисе B .

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, неповторную в B и существенно зависящую от всех своих переменных. Так как функция поляризуемая, то, не ограничивая общности и согласно утверждению 6, будем считать, что она монотонна. Согласно замечанию к этому утверждению все листья ее квазиканонического дерева помечены переменными без отрицания. Допустим, что таких деревьев два и это D_1 и D_2 . По утверждению 8 корни деревьев помечены одинаковыми функциями. Пусть $D_1^1, \dots, D_i^1$ и $D_1^2, \dots, D_j^2$ – поддеревья деревьев D_1 и D_2 , получаемые удалением корня из D_1 и D_2 , а множество $\Phi^1 = \{\Phi_1^1, \dots, \Phi_i^1\}$ и $\Phi^2 = \{\Phi_1^2, \dots, \Phi_j^2\}$ – множества формул, соответствующие этим поддеревьям. Заметим, что каждая из этих формул либо является литералом, либо имеет вид $g(\Psi_1, \dots, \Psi_k)$, где g может быть помечена функцией из множества $\{\&\} \cup P_m$, если корень помечен $\vee$, функцией из множества $\{\vee\} \cup P_m$ – если корень помечен $\&$, и $\{\&, \vee\} \cup P_m$, если корень помечен функцией из P_m .

Тогда возможны три случая:

1. Корни деревьев помечены функцией $\vee$. Тогда функция, реализуемая первым деревом, имеет вид $h_1 = \Phi_1^1 \vee \dots \vee \Phi_i^1$, а функция, реализуемая вторым деревом – $h_2 = \Phi_1^2 \vee \dots \vee \Phi_j^2$. Покажем, что для любой формулы из множества Φ^1 существует эквивалентная ей формула множества Φ^2 . Допустим, это не так и, не ограничивая общности, Φ_1^1 не равна ни одной из формул множества Φ^2 . Согласно предположению индукции это означает, что все функции, соответствующие формулам множества Φ^2 , не равны функции, которую реализует Φ_1^1 . Возьмем множество всех переменных, входящих в Φ_1^1 . Возможны три варианта:

а) Все эти переменные лежат в одной формуле из множества Φ^2 , например Φ_1^2 , и в Φ_1^2 нет других переменных. Тогда подставим нули на места всех переменных обеих функций, кроме переменных Φ_1^1 , и в силу равенства этих функций получим, что формулы реализуют одну и ту же подфункцию. Но по предположению индукции эти формулы должны быть эквивалентны. Следовательно, у Φ_1^1 существует эквивалентная ей формула множества Φ^2 . Мы получили противоречие с нашим предположением.

б) Все эти переменные лежат в одной формуле из множества Φ^2 , например Φ_1^2 , и в Φ_1^2 есть хотя бы одна другая переменная. Подставим в h_1 и h_2 нули на места всех переменных, кроме переменных формулы Φ_1^2 . Тогда

h_1 будет иметь вид $h_1 = \Phi_1^1 \vee h'$, где h' – существенная функция (так как Φ_1^1 может быть равна Φ_1^2 , как мы рассмотрели в предыдущем пункте), а h_2 будет иметь вид $h_2 = \Phi_1^2$. Это значит, что формулы Φ_1^2 и $\Phi_1^1 \vee h'$ реализуют одинаковые функции. По предположению индукции, эти формулы должны быть эквивалентны. Но в корне формулы Φ_1^2 реализуется не дизъюнкция, и поэтому из нее нельзя получить формулу $\Phi_1^1 \vee h'$ с помощью перестановки переменных. Противоречие.

в) Есть пара переменных, которые лежат в разных формулах, например, Φ_1^2 и Φ_2^2 . Подставим в h_1 и h_2 нули на места всех переменных, кроме переменных Φ_1^1 . И получим две равные подфункции, выражимые формулами вида Φ_1^1 и $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_k$ соответственно, где каждая формула Ψ_l реализует функцию, которая существенно зависит хотя бы от одной переменной Φ_1^1 . По предположению индукции, эти подфункции реализуются неповторными в B формулами с поднятыми отрицаниями, эквивалентными друг другу. Но из формулы Φ_1^1 , корень которой помечен не дизъюнкцией, нельзя с помощью перестановки переменных получить формулу $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_k$. Противоречие. Таким образом, каждая формула из множества Φ^1 имеет эквивалентную ей формулу из множества Φ^2 . В силу утверждения 6 это означает, что это равенство взаимнооднозначно. Таким образом, формулу $h_1 = \Phi_1^1 \vee \dots \vee \Phi_i^1$ можно получить из формулы $h_2 = \Phi_1^2 \vee \dots \vee \Phi_i^2$ с помощью преобразований A , C и E и коммутативности операций $\vee$ и $\&$, и утверждение теоремы верно.

2. Корни деревьев помечены функцией $\&$. Доказывается аналогично предыдущему случаю.

3. Корни деревьев помечены функцией f_4 . Тогда множества Φ^1 и Φ^2 состоят из четырех формул, функция, реализуемая первым деревом, имеет вид $h_1 = f_4(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1)$, а функция, реализуемая вторым деревом – $h_2 = f_4(\Phi_1^2, \Phi_2^2, \Phi_3^2, \Phi_4^2)$.

Покажем, что верно одно из двух предположений:

а) Одинаковы множества переменных формул Φ_1^1 и Φ_1^2 , Φ_2^1 и Φ_2^2 , Φ_3^1 и Φ_3^2 , Φ_4^1 и Φ_4^2 .

б) Одинаковы множества переменных формул Φ_1^1 и Φ_3^2 , Φ_2^1 и Φ_4^2 , Φ_3^1 и Φ_1^2 , Φ_4^1 и Φ_2^2 .

Согласно утверждению 7 существует две переменных, лежащих в разных подформулах в обоих множествах. Рассмотрим четверку переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 , где x_1 лежит в Φ_1^1 , x_2 лежит в Φ_2^1 , x_3 лежит в Φ_3^1 , x_4 лежит в Φ_4^1 , такую, что две из них лежат в разных формулах Φ^2 . Подставим константы на места остальных переменных так, чтобы от формул

$\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1$ остались только переменные x_1, x_2, x_3, x_4 . Это возможно в силу существенности переменных. Из функции h_1 получим подфункцию, выразимую формулой вида $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Так как функции h_1 и h_2 равны, то равны и получившиеся подфункции. Так как одна из пар выбранных переменных лежит в разных формулах множества Φ^2 и функция f_4 не выразима бесповторной формулой над $\vee, \&$, то оставшаяся пара переменных должна лежать в двух оставшихся формулах соответственно, и подфункция h_2 будет иметь вид $f_4(\pi(x_1, x_2, x_3, x_4))$, где $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – некоторая перестановка переменных x_1, x_2, x_3, x_4 . Из утверждения 3 и замечания к нему следует, что это возможно только при перестановке $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_4, x_1, x_2)$ и тождественной перестановке. Тогда в случае тождественной перестановки переменная x_1 лежит в Φ_1^2 , x_2 лежит в Φ_2^2 , x_3 лежит в Φ_3^2 , x_4 лежит в Φ_4^2 . Заменяя x_1 на другие переменные из Φ_1^1 и проводя аналогичные рассуждения, получим, что все переменные из Φ_1^1 лежат в Φ_1^2 . То же самое верно для переменных из других множеств: переменные из Φ_2^1 лежат в Φ_2^2 , из Φ_3^1 – в Φ_3^2 , а из Φ_4^1 – в Φ_4^2 . Следовательно, верно предположение (а). В случае перестановки $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_3, x_4, x_1, x_2)$ аналогичным образом доказывается справедливость предположения (б).

Если верно предположение (а), то докажем, что формулы Φ_1^1 и Φ_1^2 , Φ_2^1 и Φ_2^2 , Φ_3^1 и Φ_3^2 , Φ_4^1 и Φ_4^2 эквивалентны. Сначала докажем равенство формул Φ_1^1 и Φ_1^2 . Подставим единицы на места переменных из Φ_1^2 , и нули на места переменных из Φ_3^1 и Φ_4^2 . Подформулы, получаемые из h_1 и h_2 с помощью такой подстановки, равны соответственно Φ_1^1 и Φ_1^2 и равны между собой. Следовательно, по предположению индукции, формулы эквивалентны. Аналогичным образом проводится доказательство для остальных формул множества Φ^1 .

Если верно предположение (б), доказательство проводится по той же схеме.

В обоих случаях формула $f_4(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1)$ эквивалентна формуле $f_4(\Phi_1^2, \Phi_2^2, \Phi_3^2, \Phi_4^2)$. Следовательно, если корни деревьев помечены функцией f_4 , то утверждение теоремы верно.

4. Корни деревьев помечены функцией f_5 . Тогда множества Φ^1 и Φ^2 состоят из пяти формул, а функция, реализуемая первым деревом, имеет вид $h_1 = f_5(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1, \Phi_5^1)$, а функция, реализуемая вторым деревом – $h_2 = f_5(\Phi_1^2, \Phi_2^2, \Phi_3^2, \Phi_4^2, \Phi_5^2)$.

Согласно утверждению 7 существует две переменных, лежащих в разных подформулах в обоих множествах. Рассмотрим пятерку переменных

x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 , где x_1 лежит в Φ_1^1 , x_2 лежит в Φ_2^1 , x_3 лежит в Φ_3^1 , x_4 лежит в Φ_4^1 , x_5 лежит в Φ_5^1 , такую, что две из них лежат в разных формулах Φ^2 . Подставим константы на места остальных переменных аналогично предыдущему пункту. Таким образом, мы из функции h_1 получим подфункцию, выразимую формулой вида $f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, а подфункция h_2 будет иметь вид $f_5(\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))$, где $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – некоторая перестановка переменных x_1, x_2, x_3 и x_4 . Из утверждения 4 следует, что это возможно только при перестановках типа C . В этом случае формула $f_5(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \Phi_3^1, \Phi_4^1, \Phi_5^1)$ эквивалентна формуле $f_5(\Phi_1^2, \Phi_2^2, \Phi_3^2, \Phi_4^2, \Phi_5^2)$. Следовательно, если корни деревьев помечены функцией f_5 , то утверждение теоремы верно.

5. Корни деревьев помечены функцией f_m^s . Тогда множества Φ^1 и Φ^2 состоят из s формул, а функция, реализуемая первым деревом, имеет вид $h_1 = f_m^s(\Phi_1^1, \dots, \Phi_s^1)$, функция, реализуемая вторым деревом – $h_2 = f_m^s(\Phi_1^2, \dots, \Phi_s^2)$.

Покажем, что множества переменных формул Φ_1^1 и Φ_1^2 совпадают, а любое множество переменных Φ_i^1 , $1 < i \leq s$, взаимнооднозначно соответствует какому-то множеству переменных Φ_j^2 , $1 < j \leq s$. Согласно утверждению 7 существует две переменных, лежащих в разных подформулах в обоих множествах Φ_1 и Φ_2 . Рассмотрим произвольные s переменных $x_1, \dots, x_s$, где x_i лежит в Φ_i^1 , такие, что две из них лежат в разных подформулах Φ_2 . Аналогично случаю 3 подставим константы на места остальных переменных так, чтобы от формул $\Phi_1^1, \dots, \Phi_s^1$ остались только переменные $x_1, \dots, x_s$, и из функции h_1 получим $f_m^s(x_1, \dots, x_s)$, а из h_2 получим подфункцию $f_m^s(\pi(x_1, \dots, x_s))$, где $\pi(x_1, \dots, x_s)$ – некоторая перестановка переменных $x_1, \dots, x_s$. Из симметричности функции по переменным $x_2, \dots, x_s$ и несимметричности x_1 с остальными переменными следует, что это возможно только при перестановках типа E . Значит, наше предположение верно. Аналогично случаю 3 доказывается эквивалентность подформул Φ_i^1 и Φ_i^2 , где $0 < i \leq s$. Выходит, что формула $f_m^s(\Phi_1^1, \dots, \Phi_s^1)$ эквивалентна формуле $f_m^s(\Phi_1^2, \dots, \Phi_s^2)$. Следовательно, если корни деревьев помечены функцией f_m^s , то утверждение теоремы верно.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Стеценко, В. А. О предплохих базисах в P_2 / В. А. Стеценко // Математические вопросы кибернетики. – 1992. – Вып. 4. – С. 139–177.

2. **Вороненко, А. А.** О проверяющих тестах для неповторных функций / А. А. Вороненко // Математические вопросы кибернетики. – 2002. – Вып. 11. – С. 163–176.
3. **Вороненко, А. А.** О длине проверяющего теста для неповторных функций в базисе $\{0, 1, \&, \vee, \bar{x}\}$ / А. А. Вороненко // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17, № 2. – С. 139–143.
4. **Джевонс, С.** Основы науки / С. Джевонс ; пер. М. Антонович. – СПб. : Изд-во Л. Ф. Пантелеева, 1881. – 744 с.
5. **Кузнецов, А. В.** О неповторных контактных схемах и неповторных суперпозициях функций алгебры логики / А. В. Кузнецов // Труды математического института АН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 186–225.

References

1. Stetsenko V. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. 1992, iss. 4, pp. 139–177.
2. Voronenko A. A. *Matematicheskie voprosy kibernetiki* [Mathematical problems of cybernetics]. 2002, iss. 11, pp. 163–176.
3. Voronenko A. A. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2005, vol. 17, no. 2, pp. 139–143.
4. Dzhevons S. *Osnovy nauki* [Foundations of science]. Transl. by M. Antonovich. Saint-Petersburg: Izd-vo L. F. Panteleeva, 1881, 744 p.
5. Kuznetsov A. V. *Trudy matematicheskogo instituta AN SSSR* [Proceedings of the mathematical institute of AS USSR]. 1958, vol. 51, pp. 186–225.

Кафтан Дарья Владимировна

инженер факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52)

E-mail: blond.programmist@gmail.com

Kaftan Dar'ya Vladimirovna

Engineer, faculty of calculus mathematics and cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1/52 Leninskie gory street, Moscow, Russia)

УДК 517.718.7

Кафтан, Д. В.

Древесное представление неповторных функций в расширенных элементарных базисах / Д. В. Кафтан // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 37–49. DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-4